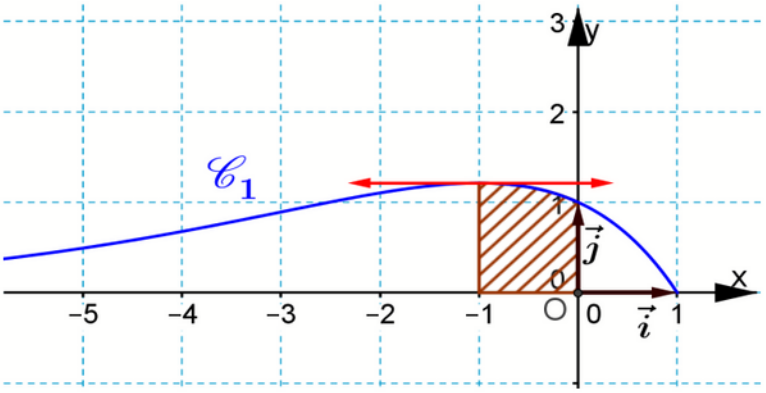
Lecture graphique

I- Dans le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}_1$ d'une fonction f_1 définie, continue, dérivable sur $]-\infty,1]$.

On sait que :

- la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $-\infty$,
- la courbe (C) atteint son maximum au point d'abscisse -1.
- f_1 solution de l'équation différentielle $(IE): y'-\frac{1}{2}y=-e^{\frac{x}{2}}$.



1°) Par lecture graphique déterminer $f'_1(-1)$, $f_1(1)$, $f_1(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$.

2°) Montrer que $f_1(-1)=\frac{2}{\sqrt{e}}$.

3°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré.

1°) $f'_1(-1)=0$; $f_1(1)=0$; $f_1(0)=1$; $\lim\limits_{-\infty} f_1=0$

2°) on a $f'_1(-1)-\frac{1}{2}f_1(-1)=-e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 0-\frac{1}{2}f_1(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$

$\Leftrightarrow \boxed{f_1(-1)=\frac{2}{\sqrt{e}}}$

3°) $\mathcal{A}=\int_{-1}^{0} f_1(x)\,dx$ or $f'_1(x)-\frac{1}{2}f_1(x)=-e^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow f_1(x)=2f'_1(x)+2e^{\frac{x}{2}}$

$=\int_{-1}^{0} 2f'_1(x)+2e^{\frac{x}{2}}\,dx$

$=\left[2f_1(x)+4e^{\frac{x}{2}}\right]_{-1}^{0}$

$\frac{1}{a}e^{ax}\longleftrightarrow e^{ax}$

$=2f_1(0)+4-2f_1(-1)-4e^{\frac{1}{2}}$

$=6-\frac{4}{\sqrt{e}}-\frac{4}{\sqrt{e}}=\boxed{6-\frac{8}{\sqrt{e}}}$